ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ یک مایع بین دو صفحه بزرگ به صورت آرام و پایدار جریان دارد. اگر دمای ورودی مایع $T_\circ$ بوده و دمای دو صفحه T_W > $T_\circ$ باشد، کدام گزینه معادله حاکم بر دما درون مایع را نشان می‌دهد؟ (z جهت جریان و y در جهت عمود بر جریان و صفحه است.)

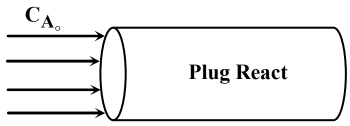
۱) $\rho C_\rho V_y \dfrac{\partial T}{\partial y} = k\dfrac{\partial^۲ T}{\partial z^۲} + h(T - T_W)$

۲) $\rho C_\rho V_y \dfrac{\partial T}{\partial y} = k\dfrac{\partial^۲ T}{\partial y^۲} + V_z \dfrac{\partial T}{\partial z}$

۳) $\rho C_\rho V_z \dfrac{\partial T}{\partial z} = k(\dfrac{\partial^۲ T}{\partial y^۲} + \dfrac{\partial^۲ T}{\partial z^۲})$

۴) $\rho C_\rho V_z \dfrac{\partial T}{\partial z} = k(\dfrac{\partial^۲ T}{\partial y^۲})$

۲ ـ اگر در یک راکتور لوله‌ای آزمایشگاهی مقدار دبی تا اندازه‌ای کم باشد که نتوانیم از ترم نفوذ در مقابل جابجایی صرف‌نظر کنیم، معادله حاکم برای واکنش درجه اول کدام است؟ (D: ضریب نفوذ ـ k: ثابت سرعت واکنش ـ V: سرعت سیال)



۱) $D\dfrac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - kC_A = 0$

۲) $V\dfrac{\partial C_A}{\partial z} + kC_A = 0$

۳) $D\dfrac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - V\dfrac{\partial C_A}{\partial z} - kC_A = 0$

۴) $D\dfrac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - (V+k)C_A = 0$

۳ ـ معادله مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $y = Ce^{-2x}$ که در آن C ثابت دلخواه می‌باشد، کدام است؟

۱) $y = C\sqrt{x}$
۲) $y = \ln x^C$
۳) $y = \sqrt{x + C}$
۴) $y = \ln\sqrt{x + C}$

۴ ـ معادله دیفرانسیل $(2x^2 + 5x)y'' + (5x - x^2)y' + (1 + x)y = 0$ مفروض است. اگر جواب معادله به صورت سری توانی $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ فرض شود، شعاع همگرایی سری، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) 1
۳) ∞
۴) 5

۵ ـ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به صورت $y = \frac{A}{x} + B$ است. معادله دیفرانسیل متناظر با آن کدام است؟

۱) $xy'' + 2xy' = 0$
۲) $xy'' + 2y' = 0$
۳) $x^3y'' + \frac{1}{2}y' = 0$
۴) $xy' + y = 0$

۶ ـ کدام‌یک از معادلات زیر کامل است؟

۱) $\dfrac{\cos y}{y}dx + \dfrac{\sin x}{x}dy = 0$

۲) $y^2e^x dx + (2x - y^2e^y)dy = 0$

۳) $(x + y + x^2)\dfrac{dx}{dy} + x + y + y^2 = 0$

۴) $(2y + \sin^2 x)dx + \sin y \cos x dy = 0$

۷ ـ پاسخ معادله دیفرانسیل $y' = tg(x + y) - 1$ کدام است؟

۱) $x + y = \mathrm{Arc}\sin(C_1e^x)$
۲) $x + y = \mathrm{Arc}\cos(C_1e^x)$
۳) $x + y = \mathrm{Arc}\sin(C_1e^{-x})$
۴) $x + y = \mathrm{Arc}\cos(C_1e^{-x})$

۸ ـ فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ کدام است؟

۱) $F = x^2$
۲) $F = x^{-2}$
۳) $F = e^{x^2}$
۴) $F = e^{-x^2}$

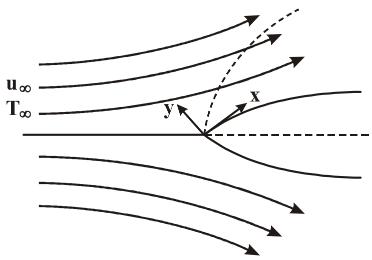
۹ ـ اگر نقطه $x = x_0$ یک نقطه .... برای یک معادله دیفرانسیل باشد، در این صورت برای حل معادله مورد نظر نمی‌توان از روش .... استفاده کرد و باید در این حالت از .... استفاده نمود.

۱) غیرعادی منظم ـ سری توانی ـ بسط فروبنیوس
۲) غیرعادی منظم ـ بسط فروبنیوس ـ سری توانی
۳) غیرعادی (منفرد یا تکین) ـ سری توانی ـ بسط فروبنیوس
۴) غیر عادی (منفرد یا تکین) ـ بسط فروبنیوس ـ سری توانی

۱۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + 2y = 2x\sqrt{y}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{y} = x - 1 + Ce^{-x}$
۲) $\sqrt{y} = x + 1 + Ce^{-x}$
۳) $\sqrt{y} = x - 1 + Ce^{x}$
۴) $\sqrt{y} = x + 1 + Ce^{x}$

۱۱ـ در شکل زیر بال یک هواپیما نشان داده شده است. معادله انرژی در لایه مرزی تشکیل شده بر روی بال به چه صورت است؟



۱) $\rho C_p(V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y})=k\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}+\mu(\frac{\partial V_x}{\partial x})^۲$

۲) $\rho C_p(V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y})=k\frac{\partial^۲ T}{\partial y^۲}+\mu(\frac{\partial V_y}{\partial y})^۲$

۳) $\rho C_p(V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y})=k\frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}+\mu(\frac{\partial V_y}{\partial x})^۲$

۴) $\rho C_p(V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y})=k\frac{\partial^۲ T}{\partial y^۲}+\mu(\frac{\partial V_x}{\partial y})^۲$

۱۲ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$y''-۲y'+y=xe^x$$

۱) $۲x^۳e^x$ ۲) $\frac{۱}{۲}x^۳e^x$ ۳) $۶x^۳e^x$ ۴) $\frac{۱}{۶}x^۳e^x$

۱۳ـ معادله دیفرانسیل $۲(۳x-۱)^۲y''+۲۱(۳x-۱)y'+۱۸y=۰$ با کدام تغییر متغیر، به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟

۱) $x=۱+e^{-۳t}$ ۲) $۳x=۱+e^t$ ۳) $x=۱-e^{۳t}$ ۴) $۳x=۱-e^{-t}$

۱۴ـ جواب معادله $x^۲y''+xy'-۴y=۰$ کدام است؟

۱) $y=\frac{C_۱}{x}+\frac{C_۲}{x^۴}$ ۲) $y=C_۱e^{۲x}+C_۲e^{-۲x}$ ۳) $y=C_۱x^۲+\frac{C_۲}{x^۲}$ ۴) $y=C_۱x+C_۲x^۴$

۱۵ـ دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر مفروض است، با توجه به آن، کدام گزینه صحیح می باشد؟

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=x+z\\ \frac{dz}{dt}=-x-z\end{cases}$$

۱) بردارهای ویژه ماتریس ضرایب طرف راست معادله برای تعیین جواب کافی‌اند.
۲) برای تعیین جواب عمومی دستگاه به بردارهای ویژه تعمیم یافته ماتریس ضرایب نیاز داریم.
۳) دستگاه مذکور همراه با یک شرط اولیه $[x(۰)=y(۰)=z(۰)=۱]$ دارای جواب‌های متعددند.
۴) دستگاه مذکور با برخی شرایط اولیه دلخواه جواب یکتا ندارد.

۱۶ـ جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $x'=\begin{bmatrix}۱&۱&۰\\۱&۰&۱\\۰&۱&۱\end{bmatrix}x$ ، کدام است؟

۱) $x=C_۱\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}e^{۲t}+C_۲\begin{bmatrix}۱\\۰\\-۱\end{bmatrix}e^{-t}+C_۳t\begin{bmatrix}۱\\۰\\-۱\end{bmatrix}e^{-t}$

۲) $x=C_۱\begin{bmatrix}۱\\۰\\۱\end{bmatrix}e^{۲t}+C_۲\begin{bmatrix}۱\\۰\\-۱\end{bmatrix}e^{-t}+C_۳t\begin{bmatrix}۱\\۰\\-۱\end{bmatrix}e^{-t}$

۳) $x=C_۱\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}e^{۲t}+C_۲\begin{bmatrix}۰\\۱\\-۱\end{bmatrix}e^{-t}+C_۳t\begin{bmatrix}۰\\۱\\-۱\end{bmatrix}e^{-t}$

۴) $x=C_۱\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}e^{۲t}+C_۲\begin{bmatrix}۱\\۰\\-۱\end{bmatrix}e^{-t}+C_۳t\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۰\end{bmatrix}e^{-t}$

۱۷ـ جواب $x(t)$ از دستگاه $\begin{cases}(D-۱)x+(D+۱)y=e^{۲t}\\ D^۲x+Dy=۳e^{۲t}\end{cases}$ کدام گزینه است؟

۱) $C_۱\cos t+C_۲\sin t+\frac{۱۱}{۱۰}e^{۲t}$

۲) $C_۱\cos t+C_۲\sin t+\frac{۹}{۱۰}e^{۲t}$

۳) $C_۱+C_۲\cos t+C_۳\sin t+\frac{۷}{۱۰}e^{۲t}$

۴) $C_۱+C_۲\cos t+C_۳\sin t+\frac{۹}{۱۰}e^{۲t}$

۱۸ـ یکی از منحنی‌های معادله دیفرانسیل $y' + y\cot x = \cos 2x$، محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند. این منحنی خط $x = \frac{\pi}{6}$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

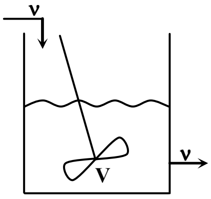
۱) $\sqrt{3}$

۲) $2\sqrt{3}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۱۹ـ گاز A وارد یک راکتور اختلاط کامل با حجم ثابت V شده و با تبدیل به B $(A \xrightarrow{k} 2B)$ در شرایط پایا با دبی ثابت از راکتور خارج می‌شود. اگر ناگهان ورودی قطع شود، مدل تغییرات غلظت ماده A با کدام معادله تطبیق می‌کند؟ $(\tau = \frac{V}{v})$



۱) $\frac{dC_A}{dt} = -\frac{C_A}{\tau} + kC_A$

۲) $\frac{dC_A}{dt} = -\frac{C_A}{\tau} - \frac{k}{2}C_A$

۳) $\frac{dC_A}{dt} = -\frac{C_A}{\tau} - kC_A$

۴) $\frac{dC_A}{dt} = \frac{C_{A_0} - C_A}{\tau} - kC_A$

۲۰ـ یک دیسک دایره‌ای به ضخامت بسیار کم D در محیطی به دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجایی متوسط h قرار دارد. سطح جانبی دیسک در دمای ثابت T_w قرار دارد. کدام‌یک از معادلات زیر توزیع دمای دیسک را نشان می‌دهد؟ (ثابت هدایت حرارتی دیسک k می‌باشد.)

۱) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{2h}{kD}(T - T_\infty) = 0$

۲) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{2h}{kD}(T - T_\infty) = 0$

۳) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{2hr}{kD}(T - T_\infty) = 0$

۴) $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{h}{kD}(T - T_\infty) = 0$

ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ گزینه «۴»

در این مسأله:

در جهت y (عمود بر جهت جریان) باید تنها ترم نفوذ را داشته باشیم و از طرفی در جهت z تنها باید ترم جابجایی یا Convection را در نظر گرفت و ترم نفوذ قابل صرف‌نظر کردن است در نتیجه تنها گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

نکات مهم در حل تست‌های مدل‌سازی

۱ـ پدیده نفوذ Diffusion $\leftarrow$ مشتق دوم

۲ـ پدیده جابجایی Convection (حرکت توده سیال) $\leftarrow$ مشتق اول

۳ـ در جهت حرکت توده جریان، جمله مربوط به انتقال مولکولی (مشتق دوم) قابل صرف‌نظر است.

۴ـ هرگاه کره صلب همگن بوده و انتقال گرما در شرایط پایا صورت گیرد، تغییرات در جهت θ و ϕ صفر است و فقط تغییرات شعاعی در جهت r داریم.

۵ـ در مدل‌سازی‌هایی که منجر به معادله بسل اصلاح شده می‌شود، از این مطلب که تابع $k_p(x)$ وقتی $x \to ۰$ مقدار نامحدود دارد، استفاده می‌کنیم.

نکته: معمولاً سؤالات مدل‌سازی ریاضی و فرمولاسیون در کنکور مهندسی شیمی با روش‌ها و نکات تستی که در این سؤالات مطرح می‌شود، حل می‌گردد چراکه حل تشریحی و المان‌گیری در این نوع مسائل طولانی و پیچیده خواهد بود.

۲ ـ گزینه «۳»

با توجه به معادله پیوستگی داریم:

$$D_{AB}\nabla^{۲}C_A + R_A = V.\nabla C_A + \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

فرآیند را پایا (S.S) در نظر می‌گیریم. $\Rightarrow \dfrac{\partial C_A}{\partial t} = ۰ \qquad R_A = -kC_A$

$$\Rightarrow D_{AB}\frac{\partial^{۲}C_A}{\partial z^{۲}} - kC_A = V.\frac{\partial C_A}{\partial z} \Rightarrow D_{AB}\frac{\partial^{۲}C_A}{\partial z^{۲}} - V\frac{\partial C_A}{\partial z} - kC_A = ۰$$

نکات مدل‌سازی

۱ـ هرگاه استوانه صلب همگن باشد، تغییرات در جهت θ صفر است.

۲ـ در مورد مختصات استوانه‌ای:

الف ـ اگر شعاع استوانه به اندازه کافی کوچک باشد، انتقال گرما را می‌توان یک بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفت.

ب ـ اگر سطح مقطع استوانه عایق باشد، انتقال گرما در جهت شعاعی صورت می‌گیرد.

ج ـ اگر سطح جانبی استوانه عایق بوده و نسبت طول به شعاع استوانه به اندازه کافی بزرگ باشد، انتقال گرما را می‌توان یک بعدی و در جهت محوری در نظر گرفت.

د ـ هرگاه طول استوانه زیاد باشد می‌توانیم از انتقال گرما در جهت طول (z) صرف‌نظر کنیم. $\Leftarrow \dfrac{\partial^{۲}T}{\partial z^{۲}} = ۰$

نکته: تشخیص مختصات مدل‌سازی در مسائل فرمولاسیون مهم است.

۳ـ گزینه «۳»

مسیرهای قائم در مختصات دکارتی:

اگر دو منحنی متعامد باشند آنگاه در هر نقطه تلاقی، شیب (ضریب زاویه) منحنی‌ها باید عکس قرینه یکدیگر باشند. بنابراین برای یافتن مسیرهای قائم یک خانواده از منحنی‌های مفروض ابتدا معادله دیفرانسیل خانواده مفروض را تعیین می‌کنیم یعنی $F(x,y,y')=0$ سپس $\frac{dy}{dx}$ را با $-\frac{dx}{dy}$ در معادله دیفرانسیل حاصل عوض می‌کنیم تا به معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم منحنی‌های مفروض برسیم یعنی با حل این معادله به خانواده منحنی‌هایی می‌رسیم که همان مسیرهای متعامد مورد نظر است.

$$F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$$

در این مسأله:

$$y=Ce^{-2x} \Rightarrow C=ye^{2x} \Rightarrow dy=-2Ce^{-2x}dx \Rightarrow dy=-2(ye^{2x})e^{-2x}dx \Rightarrow dy=-2ydx$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y \xrightarrow{\text{مسیرهای قائم}} -\frac{dx}{dy}=-2y \Rightarrow dx=2ydy \Rightarrow x+C=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{x+C}$$

۴ ـ گزینه «۴»

جواب‌های سری حول یک نقطه عادی:

شعاع همگرایی جواب‌های سری معادله دیفرانسیل $p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$ حول نقطه $x=x_0$ حداقل برابر Min شعاع همگرایی سری‌های $\frac{q(x)}{p(x)}$ و $\frac{r(x)}{p(x)}$ است و برای تعیین آن، نقاط تکین معادله دیفرانسیل رابدست آروده و Min فاصله این نقاط را تا نقطه $x=x_0$ تعیین می‌نماییم.

در این مسأله:

$$(2x^2+5x)y''+(5x-x^2)y'+(1+x)y=0 \Rightarrow y''+(\frac{5x-x^2}{2x^2+5x})y'+(\frac{1+x}{2x^2+5x})y=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+5x=0 \Rightarrow x=0\,,\, x=-5$$

به این ترتیب Min فاصله نقاط تکین فوق تا نقطه $x=0$ برابر صفر می‌باشد.

٭ دو مبحث سری‌های جواب در مجاورت نقاط عادی و سری‌های جواب در مجاورت یک نقطه غیرعادی مهم است.

۵ ـ گزینه «۲»

نحوه بدست آوردن معادله دیفرانسیل از روی جواب آن:

وقتی که جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل معلوم باشد، به تعداد متغیرها مشتق می‌گیریم و بعد متغیرها را حذف می‌کنیم.

در این مسأله:

دو متغیر A و B داریم پس ۲ بار مشتق می‌گیریم. $\Rightarrow \begin{cases} y' = -\dfrac{A}{x^{۲}} \Rightarrow A = -x^{۲}y' & (۱) \\ y'' = \dfrac{۲A}{x^{۳}} \Rightarrow A = \dfrac{۱}{۲}x^{۳}y'' & (۲) \end{cases}$

$$(۱)=(۲) \Rightarrow -x^{۲}y' = \frac{۱}{۲}x^{۳}y'' \Rightarrow xy'' + ۲y' = ۰$$

۶ ـ گزینه «۳»

معادلات دیفرانسیل کامل و غیرکامل:

معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = ۰$ را یک معادله دیفرانسیل کامل می‌نامیم به شرطی که: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

در این مسأله باید این شرط را روی تمام گزینه‌ها یکی یکی امتحان کنیم:

گزینه ۱ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{-y\sin y - \cos y}{y^{۲}} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^{۲}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ معادله کامل نیست.

گزینه ۲ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = ۲ye^{x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = ۲ \end{cases} \Rightarrow$ معادله کامل نیست.

گزینه ۳ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = ۱ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ معادله کامل است.

گزینه ۴ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = ۲ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y \sin x \end{cases} \Rightarrow$ معادله کامل نیست.

۷ ـ گزینه «۱»

معادلات دیفرانسیل تفکیک‌پذیر:

۱ـ ساده‌ترین حالت $y'=f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x).f_2(y) \Rightarrow \int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx$$

۲ـ حالت خاص: $y'=f(ax+by+c)$ این معادلات تفکیک‌ناپذیر هستند ولی با تغییر متغیر $u=ax+by+c$ به تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شوند.

در این مسأله:

$$u=x+y \Rightarrow u'=1+y' \Rightarrow y'=u'-1$$

جاگذاری در معادله: $u'-1=\text{tg}u-1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=\text{tg}u \Rightarrow \frac{du}{\text{tg}u}=dx \Rightarrow \int \cot u\,du=\int dx \Rightarrow \ln|\sin u|=x+c$

$$\Rightarrow \sin u=e^{x+c}=e^x.\underbrace{e^c}_{\text{مقدار ثابت}}=C_1e^x \Rightarrow u=\text{Arcsin}(C_1e^x) \Rightarrow x+y=\text{Arcsin}(C_1e^x)$$

* تشخیص نوع معادله و عملیات ریاضی در این تست حائز اهمیت می‌باشد.

۸ ـ گزینه «۲»

نحوه بدست آوردن فاکتور انتگرال:

اگر در معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ شرایط به صورت $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد، معادله دیگر کامل نیست اما اگر بتوان تابع F را طوری پیدا کرد که با ضرب آن در معادله، معادله دیفرانسیل کامل شود، آنگاه F را فاکتور (عامل) انتگرال‌ساز می‌گوییم. یک معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک فاکتور انتگرال داشته باشد.

$$FP(x,y)dx+FQ(x,y)dy=0 \Rightarrow \frac{\partial(FP)}{\partial y}=\frac{\partial(FQ)}{\partial x}$$

نحوه بدست آوردن F:

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=\Delta \Rightarrow \begin{cases}(1)\ \frac{\Delta}{Q}=f(x)\ \text{تابع}\ x \Rightarrow F=e^{\int f(x)dx}\\ (2)\ \frac{\Delta}{P}=f(y)\ \text{تابع}\ y \Rightarrow F=e^{-\int f(y)dy}\\ (3)\ \frac{\Delta}{Q}\neq f(x)\,,\ \frac{\Delta}{P}\neq f(y) \Rightarrow F=\frac{1}{Qy+Px}\end{cases}$$

نکته: در حالت (۳) معادله دیفرانسیل مذکور همگن است ولی کامل نیست.

در این مسأله:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial y}=2y\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\end{array}\right| \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=\Delta=4y$$

$$\begin{cases}\frac{\Delta}{Q}=\frac{4y}{-2xy}=-\frac{2}{x} \Rightarrow F=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}} \Rightarrow F=x^{-2}\\ \frac{\Delta}{P}=\frac{4y}{x+y^2}\quad \text{هم تابعی از } x \text{ و هم تابعی از } y \text{ که به درد ما نخواهد خورد.}\end{cases}$$

۹ ـ گزینه «۱»

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌های موازی:

برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ نقطه $x=x_\circ$ را یک نقطه عادی می‌نامند هرگاه $q(x)$ ، $p(x)$ و $g(x)$ هر سه در این نقطه تحلیلی (تعریف شده) باشند یعنی دارای یک سری توانی برحسب $(x-x_\circ)$ و با شعاع همگرایی مثبت باشند. اگر یکی از توابع $p(x), q(x)$ و $g(x)$ در $x=x_\circ$ تحلیلی نباشند این نقطه را نقطه تکین (غیرعادی یا منفرد) معادله می‌نامند. هرگاه $x=x_\circ$ یک نقطه تکین معادله دیفرانسیل فوق بوده و توابع $(x-x_\circ)p(x)$ و $(x-x_\circ)^۲q(x)$ هر دو در این نقطه تحلیلی باشند، $x=x_\circ$ را نقطه تکین منظم و در غیر این صورت $x=x_\circ$ را نقطه تکین نامنظم معادله می‌نامند.

نکته: جواب‌های سری حول یک نقطه تکین (روش فربنیوس)

هرگاه $x=x_\circ$ یک نقطه تکین منظم معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=\circ$ باشد، جواب معادله را به شکل $y=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_nx^{n+r}$ در نظر می‌گیریم و با جاگذاری y و مشتقات آن در معادله، مقدار r را با استفاده از معادله مشخصه زیر که از این جاگذاری حاصل می‌شود، بدست می‌آوریم که به این روش بسط فربنیوس می‌گوییم.

معادله مشخصه: $F(r)=r(r-۱)+p_\circ r+q_\circ=\circ$

$p_\circ=\lim\limits_{x\to\circ}xp(x) \qquad q_\circ=\lim\limits_{x\to\circ}x^۲q(x)$

نکته تستی: چون حل معادلات دیفرانسیل به روش سری توانی یا بسط فربنیوس عملاً در وقت محدود کنکور میسر نیست لذا دانستن مفاهیم کاربردی این روش‌ها در قالب این نوع سؤالات اهمیت خاصی دارد.

۱۰ـ گزینه «۱»

معادله برنولی نسبت به متغیر y ، $y'+p(x)y=q(x)y^n$

برای حل ابتدا طرفین معادله را بر y^n تقسیم می‌کنیم $\Leftarrow$ $(I)\ y'y^{-n}+p(x)y^{۱-n}=q(x)$

با انتخاب تغییر متغیر $z=y^{۱-n}$ معادله برنولی به معادله خطی تبدیل می‌شود، زیرا:

$$z=y^{۱-n} \Rightarrow z'=(۱-n)y'y^{-n} \Rightarrow y'y^{-n}=\frac{z'}{۱-n}$$

پس با جایگزین کردن مقادیر فوق در معادله (I) می‌توان نوشت:

که یک معادله خطی نسبت به z بدست می‌آوریم.

$$\frac{z'}{۱-n}+p(x)z=q(x) \Rightarrow z'+(۱-n)p(x)z=(۱-n)q(x)$$

در این مسأله:

$$\xrightarrow{\div y^{\frac{۱}{۲}}} y'y^{-\frac{۱}{۲}}+۲y^{\frac{۱}{۲}}=۲x \xrightarrow{z=y^{\frac{۱}{۲}}} z'=\frac{۱}{۲}y'y^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow y'y^{-\frac{۱}{۲}}=۲z' \Rightarrow z'+z=x$$

$$\Rightarrow z=e^{-x}\left[\int xe^{x}dx+C\right]=e^{-x}\left[e^{x}(x-۱)+C\right] \Rightarrow z=x-۱+Ce^{-x} \Rightarrow \sqrt{y}=x-۱+Ce^{-x}$$

نکته مهم:

فرم کلی معادله برنولی نسبت به متغیر x به صورت $x' + f(y)x = g(y)x^n$ است که با تقسیم طرفین معادله بر x^n و با انتخاب تغییر متغیر $z = x^{1-n}$ معادله فوق به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

❊ تشخیص نوع معادله برنولی نسبت به متغیر x یا y در این تست مهم می‌باشد.

۱۱- گزینه «۴»

به دلیل سرعت زیاد سیال، ترم تلفات ویسکوز قابل صرف‌نظر کردن نیست. با توجه به این‌که تنش برشی و بـه تبـع آن تلفـات ویـسکوز، روی بـال هواپیما با عبارت $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ مرتبط است، پس باید ترم $\mu(\frac{\partial V_x}{\partial y})^2$ که نشانگر تلفات ویسکوز است، در جواب حضور داشته باشد. از طرف دیگر هدایت حرارتی در جهت y غالب است و می‌توان از هدایت حرارتی در جهت x صرف‌نظر کرد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۱۲- گزینه «۴»

ابتدا جواب عمومی معادله همگن را پیدا می‌کنیم.

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \rightarrow \text{معادله مشخصه}: m^2 - 2m + 1 = 0 \quad m_{1,2} = 1$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

با توجه به این که ۱ ریشه معادله مشخصه از مرتبه تکرار ۲ است داریم:

$$y_p = x^2 e^x (Ax + B) \ \rightarrow y_p' = e^x[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]$$

$$\rightarrow y_p'' = e^x[Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B]$$

$$\Rightarrow y_p'' - 2y_p' + y_p = (6Ax + 2B)e^x = xe^x \ \Rightarrow A = \frac{1}{6}\ , B = 0 \ \Rightarrow y_p = \frac{1}{6}x^3 e^x$$

۱۳ـ گزینه «۲»

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب متغیر $\xleftarrow{\text{حالت خاص مهم}}$ معادله کوشی ـ اویلر

$$(۱)\ x^n y^{(n)} + a_{n-۱}x^{n-۱}y^{(n-۱)} + \dots + a_{\circ}y_{\circ} = \circ \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} x = e^z \text{ یا } z = \ln x$$

$$(۲)\ (ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-۱}(ax+b)^{n-۱}y^{(n-۱)} + \dots + a_{\circ}y_{\circ} = \circ \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} ax+b = e^z \text{ یا } z = \ln(ax+b)$$

معادلات کوشی ـ اویلر با تغییر متغیرهای فوق به معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت تبدیل شده و قابل حل می‌شود.

در این مسأله با تغییر متغیر زیر معادله مذکور که معادله اولر است به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

$$۳x - ۱ = e^t \Rightarrow ۳x = ۱ + e^t$$

❊ حل معادله کوشی ـ اویلر بسیار مهم است.

۱۴ـ گزینه «۳»

حل معادله اولر: $x^۲y'' + axy' + by = \circ$

تغییر متغیر:

$$x = e^z \text{ یا } z = \ln x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{۱}{x}\frac{dy}{dz} \qquad y'' = \frac{۱}{x^۲}\left(\frac{dy}{dz} - \frac{d^۲y}{dz^۲}\right)$$

معادله اولر پس از جایگزینی به صورت معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت بدست می‌آید که از طریق روش اپراتور (معادله مفسر) حل می‌شود.

$$y'' + (a-۱)y' + by = \circ \rightarrow t^۲ + (a-۱)t + b = \circ \begin{cases} \Delta > \circ \xrightarrow{t = t_۱, t_۲} y = C_۱x^{t_۱} + C_۲x^{t_۲} \\ \Delta = \circ \xrightarrow{t = t_۱ = t_۲} y = (C_۱ + C_۲\ln x)x^t \\ \Delta < \circ \xrightarrow{t = p \pm iq} y = x^p\left[C_۱\cos(q\ln x) + C_۲\sin(q\ln x)\right] \end{cases}$$

در این مسأله:

$$x^۲y'' + axy' + by = \circ \Rightarrow m^۲ + (a-۱)m + b = \circ$$

$$m^۲ - ۴ = \circ \xrightarrow{\Delta > \circ} m = \pm ۲ \Rightarrow y = C_۱x^۲ + C_۲x^{-۲} \Rightarrow y = C_۱x^۲ + \frac{C_۲}{x^۲}$$

نکته تستی:

در جواب معادله اولر هیچ‌گاه $e^{\pm x}$ ظاهر نمی‌شود.

❊ معادله کوشی ـ اویلر $x^۲y'' + axy' + by = \circ$ همیشه یکی از سوالات کنکور ارشد بوده است.

۱۵ ـ گزینه «۱»

روش اویلر برای حل دستگاه معادلات مرتبه اول خطی همگن با ضرایب ثابت:

نکات

۱ـ اگر کلیه مقادیر ویژه ماتریس A ساده باشند، n بردار ویژه A هر کدام متناظر با یک مقدار ویژه، مستقل خطی هستند.

۲ـ اگر یکی از مقادیر ویژه ساده نبوده و دارای چندگانگی m باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

الف ـ m بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقادیر ویژه موجود است.

ب ـ تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با این مقادیر ویژه کمتر از m است.

$$\text{ماتریس ضرایب}: A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow |A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&1\\-1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2+\lambda-1)=0\Rightarrow \lambda_1=0\,,\ \lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

با توجه به این که مقادیر بدست آمده برای مقادیر ویژه از هم متمایز هستند، سه بردار ویژه متناظر با این مقادیر هم مستقل خطی بوده و برای تعیین جواب کافی هستند. با توجه به نکته ذکر شده اگر مقادیر ویژه تکراری بودند باید موضوع وابستگی یا مستقل خطی بودن را هم تحقیق می‌کردیم.

❋ محاسبه دترمینان ماتریس و تحلیل جواب‌ها در بدست آوردن گزینه درست تأثیر دارد.

۱۶ ـ گزینه «۴»

حل تشریحی:

$$\text{ماتریس ضرایب}: A\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow |A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda+1)^2=0\Rightarrow \lambda_1=2\,,\ \lambda_2=\lambda_3=-1$$

برای $\lambda_1=2$:

$$\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2n_1+n_2+n_3=0\\ n_1-2n_2+n_3=0\end{cases}$$

با فرض $n_1=1 \Leftarrow n_3=1\,,\ n_2=1$ بنابراین بردار ویژه مربوطه به صورت $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ خواهد بود.

برای $\lambda_2=\lambda_3=-1$:

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow n_1+n_2+n_3=0$$

با انتخاب $n_1=1\,,\ n_2=0 \Leftarrow n_3=-1$ و با انتخاب $n_1=1\,,\ n_2=-1 \Leftarrow n_3=0$ بنابراین دو بردار ویژه مستقل به صورت $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ خواهد بود. بنابراین جواب دستگاه عبارت است از:

$$x=C_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{2t}+C_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-t}+C_3t\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{-t}$$

حل تستی:

اگر به گزینه‌ها دقت کنیم می‌فهمیم که بردارهای ویژه متناظر با جواب‌های e^{-t} و te^{-t} در هر سه گزینه ۱، ۲ و ۳یکسان است و با توجه به این که دو بردار مربوطه باید مستقل باشند لذا هر سه گزینه نادرست است.

* تشخیص و محاسبه درست ماتریس ضرایب و همچنین محاسبه بردار ویژه (انتخاب n_1, n_2, n_3) بسیار مهم است.

۱۷ ـ گزینه «۳»

روش عملگرها:

برای تعیین x از قاعده کرامر استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & D+1 \\ 3e^{2t} & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & D+1 \\ D^2 & D \end{vmatrix}} = \frac{2e^{2t} - 6e^{2t} - 3e^{2t}}{D^2 - D - D^3 - D^2} = \frac{-7e^{2t}}{-D^3 - D} \Rightarrow (D^3 + D)x = 7e^{2t}$$

معادله مشخصه معادله همگن: $m^3 + m = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \,,\, m_{2,3} = \pm i$

جواب عمومی معادله همگن: $x_h = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t$

برای تعیین جواب خصوصی از روش اپراتورهای معکوس استفاده می‌کنیم:

$$x_p = \frac{7e^{2t}}{D^3 + D} = \frac{7}{2^3 + 2} e^{2t} = \frac{7}{10} e^{2t} \Rightarrow x = x_h + x_p = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + \frac{7}{10} e^{2t}$$

۱۸ـ گزینه «۳»

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول به فرم کلی $y' + p(x)y = q(x)$ است.

۱ـ معادلات خطی مرتبه اول همگن به سادگی به معادلات جدایی‌پذیر تبدیل شده و حل می‌شوند.

۲ـ جواب معادلات خطی مرتبه اول غیرهمگن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} q(x) = 0 \rightarrow \text{معادله همگن} \\ q(x) \neq 0 \rightarrow \text{معادله ناهمگن} \end{cases}$$

همگن (۱) : $y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$

که با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق می‌توان به جواب رسید.

$$\Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

غیرهمگن (۲) : $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c\right]$

نکته:

عامل انتگرال‌ساز معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی عبارت است از: $\mu = e^{\int p(x)\,dx}$

در این مسأله:

$$p(x) = \cot x \qquad q(x) = \cos 2x$$

$$y = e^{-\int \cot x\,dx}\left[\int \cos 2x e^{\int \cot x\,dx} dx + c\right] = e^{-\ln|\sin x|}\left[\int \cos 2x e^{\ln|\sin x|}\,dx + c\right]$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \cos 2x \sin x dx + c\right] = \frac{1}{\sin x}\left[\int (2\cos^2 x - 1)\sin x\,dx + c\right] = \frac{1}{\sin x}\left[-\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + c\right]$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 0\ \Rightarrow\ \frac{1}{1}[0+0+c] = 0\ \Rightarrow\ c = 0\ \Rightarrow\ y(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\left[-\frac{2}{3}\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\ \Rightarrow\ y(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۹ـ گزینه «۳»

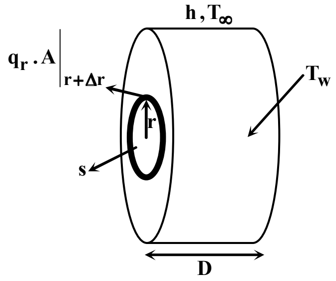
موازنه جرم را برای ماده A می‌نویسیم:

ورودی − خروجی + تولید − مصرف = تجمع

$$0 - C_A v + 0 - (-r_A)V = \frac{dN_A}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{1}{V}\frac{dN_A}{dt} = -C_A(\frac{v}{V}) - kC_A$$

چون حجم راکتور ثابت است. $\Rightarrow\ \dfrac{dC_A}{dt} = \dfrac{-C_A}{\tau} - kC_A$

۲۰ـ گزینه «۱»



$$q_r.A\Big|_r - q_r.A\Big|_{r+\Delta r} - 2hs(T - T_\infty) = 0$$

$$A = 2\pi rD\ ,\ S = 2\pi r\Delta r\ \Rightarrow\ q_r.(2\pi rD)\Big|_r - q_r(2\pi rD)\Big|_{r+\Delta r} - 4h\pi r\Delta r(T - T_\infty) = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2\pi D\Delta r} \frac{(q_r.r)_r - (q_r.r)_{r+\Delta r}}{\Delta r} - \frac{2hr}{D}(T - T_\infty) = 0 \xrightarrow{\Delta r\to 0} -\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) - \frac{2hr}{D}(T - T_\infty) = 0\ ,\ q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{2h}{kD}(T - T_\infty) = 0$$

نکته مدل‌سازی

در مدلسازی سیستم‌های استوانه‌ای در جهت r در صورت وجود مشتق دوم نسبت به r، باید یکی از عبارت‌های زیر در معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد:

۱) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})$ ۲) $\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})$

۳) $r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}$ ۴) $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$

در مدل‌سازی سیستم‌های کروی در جهت r، در صورت وجود مشتق دوم نسبت به r، باید یکی از عبارت‌های زیر در معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد.

۱) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})$ ۲) $\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})$

۳) $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\frac{\partial u}{\partial r}$ ۴) $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$

۵) $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$